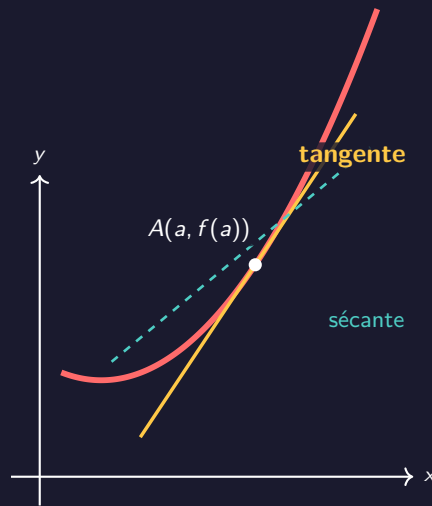


FICHE 03

# La dérivation

Nombre dérivé & tangente ■ Fonction dérivée ■ Opérations



Première ■ Spécialité Mathématiques ■ Programme officiel



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Pourquoi étudier la dérivation ?</b>	<b>3</b>
1.1	Le problème fondamental . . . . .	3
1.2	L'idée directrice . . . . .	3
<b>2</b>	<b>L'idée avant la formule</b>	<b>4</b>
2.1	Vitesse moyenne, vitesse instantanée . . . . .	4
2.2	Zoomer sur une courbe . . . . .	4
2.3	De la sécante à la tangente . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Le cours complet</b>	<b>6</b>
3.1	Taux de variation et sécante . . . . .	6
3.2	Nombre dérivé . . . . .	6
3.3	La tangente . . . . .	7
3.4	Calculs à partir de la définition . . . . .	7
3.5	Fonction dérivée et dérivées usuelles . . . . .	8
3.6	Opérations sur les fonctions dérivables . . . . .	9
3.7	Dérivée de $x^n$ et fonction valeur absolue . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Boîte à outils : réflexes pour le bac</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Exercices</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Problème : Les tangentes à la parabole ★★★</b>	<b>16</b>
<b>7</b>	<b>✓ Corrigés détaillés</b>	<b>17</b>

# 1 Pourquoi étudier la dérivation ?

## 1.1 Le problème fondamental

Comment mesurer une **vitesse à un instant précis** ? Un compteur de voiture affiche 90 km/h « maintenant », mais la vitesse est une distance divisée par un temps : sur quel temps, si l'instant n'a pas de durée ? Comment mesurer la **pente d'une courbe** en un point, alors qu'une pente se calcule entre **deux** points ? Ces deux questions, l'une physique, l'autre géométrique, ont la même réponse : la **dérivation**.

**Cinématique**  
vitesse  
instantanée

**Géométrie**  
pente d'une  
tangente

**Économie**  
coût  
marginal

**Optimisation**  
maximum,  
minimum

**Cinématique.** La vitesse instantanée est la limite de la vitesse moyenne sur un intervalle de temps de plus en plus court : c'est un **nombre dérivé**.

**Géométrie.** La **tangente** en un point est la position limite des sécantes ; sa pente est le nombre dérivé. Tout le chapitre relie ces deux visions.

**Économie.** Le **coût marginal** (coût de produire un objet de plus) est, en bonne approximation, la dérivée de la fonction coût.

**Optimisation.** Là où une fonction atteint un maximum ou un minimum, sa tangente est **horizontale** : le nombre dérivé s'annule. C'est l'outil clé de la fiche suivante (variations).

## 1.2 L'idée directrice

### L'idée directrice :

Le **nombre dérivé**  $f'(a)$  mesure la **vitesse de variation** de  $f$  au point  $a$ . On l'obtient en calculant la pente d'une **sécante** entre  $a$  et un point très proche, puis en « faisant tendre » ce point vers  $a$  : la sécante devient **tangente**. À partir des nombres dérivés en tous points, on construit la **fonction dérivée**  $f'$ , qui se calcule avec quelques formules et règles d'opérations.

### Intuition | Pourquoi c'est un chapitre clé

La dérivation est l'outil central de toute l'analyse au lycée. Elle permet d'étudier les **variations** d'une fonction (fiche suivante), de tracer des courbes, de résoudre des problèmes d'**optimisation**, et elle est au cœur de la définition de la **fonction exponentielle**. C'est un investissement qui rapporte pendant deux ans.

## 2 L'idée avant la formule

### 2.1 Vitesse moyenne, vitesse instantanée

#### Intuition | Le radar et le compteur

Une voiture parcourt 100 km en 1 heure : sa vitesse **moyenne** est 100 km/h. Mais à un instant donné, le compteur peut indiquer 130 ou 0. La vitesse moyenne entre deux instants est une distance divisée par une durée, c'est-à-dire un **taux de variation**. Pour obtenir la vitesse **à un instant précis**, on calcule cette moyenne sur un intervalle de temps de plus en plus court (1 s, puis 0,1 s, puis 0,01 s...). La valeur vers laquelle on se stabilise est la **vitesse instantanée** : c'est exactement le **nombre dérivé**.

### 2.2 Zoomer sur une courbe

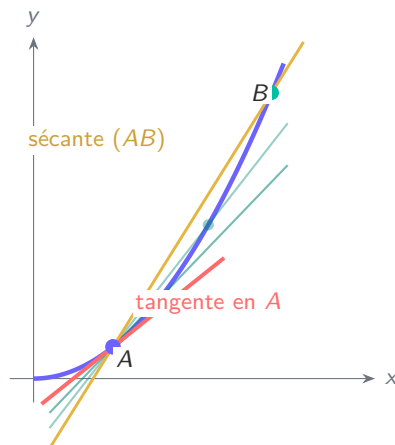
#### Intuition | Une courbe ressemble à une droite quand on zoome

Prends une courbe lisse et zoome de plus en plus près d'un de ses points : elle devient de plus en plus **droite**. Cette droite limite, c'est la **tangente**. La pente de cette tangente est le nombre dérivé  $f'(a)$ . Autrement dit, **très près de  $a$** , la fonction se comporte comme sa tangente :

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a) \times h \quad \text{pour } h \text{ petit.}$$

C'est l'**approximation affine** : remplacer localement une courbe compliquée par une simple droite.

### 2.3 De la sécante à la tangente



Animation en **lecture automatique** dans **Adobe Acrobat Reader** (gratuit). Dans un autre lecteur, l'image fixe ci-dessus reste valable ; le même contenu est aussi fourni en GIF dans le dossier *Première/Animations*.

**Version 1** :  $x \rightarrow a$  (le point B d'abscisse  $x$  glisse vers A)

**Version 2 :  $h \rightarrow 0$  (on pose  $B$  d'abscisse  $a + h$ , et  $h$  diminue)**

Quand le point  $B$  se rapproche de  $A$  en glissant sur la courbe, la **sécante** ( $AB$ ) pivote autour de  $A$  et tend vers une position limite : la **tangente** en  $A$ . Les pentes des sécantes (les taux de variation) tendent alors vers la pente de la tangente, le nombre dérivé.

### 3 Le cours complet

#### 3.1 Taux de variation et sécante

##### Définition | Taux de variation

Soit  $f$  une fonction et  $a, b$  deux réels distincts de son ensemble de définition. Le **taux de variation** (ou taux d'accroissement) de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est le nombre

$$\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

C'est la **pente de la sécante** qui joint les points  $A(a; f(a))$  et  $B(b; f(b))$  de la courbe.

##### Méthode | La notation avec $h$

On pose souvent  $b = a + h$ , où  $h$  est un petit « pas » non nul. Le taux de variation s'écrit alors

$$\tau(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Faire « tendre  $b$  vers  $a$  » revient à faire « tendre  $h$  vers 0 ». C'est cette forme qu'on utilise pour dériver.

##### Exemple | Calculer un taux de variation

Soit  $f(x) = x^2$ . Le taux entre  $a = 2$  et  $b = 5$  vaut  $\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{3} = 7$ . Avec la notation  $h$  en  $a = 2$  :  $\frac{(2 + h)^2 - 4}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h$ .

#### 3.2 Nombre dérivé

##### Définition | Nombre dérivé

On dit que  $f$  est **dérivable en**  $a$  lorsque le taux de variation  $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$  se rapproche d'un nombre fini lorsque  $h$  tend vers 0. Ce nombre est appelé **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$  et se note  $f'(a)$  :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

(En Première, cette limite est comprise de façon **intuitive** : on simplifie le taux jusqu'à pouvoir remplacer  $h$  par 0.)

##### Exemple | Nombre dérivé à partir de la définition

Pour  $f(x) = x^2$  en  $a = 2$  : on a vu  $\tau(h) = 4 + h$ . Quand  $h \rightarrow 0$ ,  $4 + h \rightarrow 4$ . Donc  $f'(2) = 4$ . La pente de la tangente à la parabole au point d'abscisse 2 vaut 4.

### 3.3 La tangente

#### ★ Théorème | Équation de la tangente

Si  $f$  est dérivable en  $a$ , la courbe de  $f$  admet au point  $A(a; f(a))$  une **tangente** de pente  $f'(a)$ , dont l'équation est

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

#### Démonstration | Équation de la tangente (exigible)

La tangente est la droite passant par  $A(a; f(a))$  et de pente (coefficient directeur)  $m = f'(a)$ . Une droite de pente  $m$  passant par  $A(a; f(a))$  a pour équation  $y - f(a) = m(x - a)$ , soit  $y = f(a) + m(x - a)$ . En remplaçant  $m$  par  $f'(a)$  :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$



#### Méthode | Déterminer une équation de tangente

1. Calculer  $f(a)$  (l'ordonnée du point de contact).
2. Calculer  $f'(x)$ , puis  $f'(a)$  (la pente).
3. Remplacer dans  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$  et développer.

#### Exemple | Tangente

Soit  $f(x) = x^2$  et  $a = 2$ . On a  $f(2) = 4$  et  $f'(2) = 4$ . La tangente est  $y = 4 + 4(x - 2) = 4x - 4$ .

#### Attention | Lecture graphique d'un nombre dérivé

Pour lire  $f'(a)$  sur un graphique : trace la tangente au point d'abscisse  $a$ , puis calcule sa pente (« on avance de 1, on monte de combien ? »). Une tangente **horizontale** signifie  $f'(a) = 0$ .

### 3.4 Calculs à partir de la définition

#### ★ Théorème | Dérivées de la fonction carré et de la fonction inverse

- Pour  $f(x) = x^2$  :  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = 2x$ .
- Pour  $f(x) = \frac{1}{x}$  :  $f$  est dérivable sur  $] -\infty ; 0[$  et sur  $]0 ; +\infty[$ , et  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

*Démonstration | Dérivée de la fonction carré (exigible)*

Pour  $f(x) = x^2$ , le taux en  $a$  vaut

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h.$$

Quand  $h \rightarrow 0$ ,  $2a + h \rightarrow 2a$ . Donc  $f'(a) = 2a$  pour tout  $a$ , c'est-à-dire  $f'(x) = 2x$ . ■

*Démonstration | Dérivée de la fonction inverse (exigible)*

Pour  $f(x) = \frac{1}{x}$  (avec  $a \neq 0$ ), le taux en  $a$  vaut

$$\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} = \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{a(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}.$$

Quand  $h \rightarrow 0$ ,  $a+h \rightarrow a$ , donc le taux tend vers  $\frac{-1}{a \cdot a} = -\frac{1}{a^2}$ . Donc  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ . ■

★ **Théorème | La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0**

La fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  avec  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , mais elle **n'est pas dérivable en 0** : sa courbe y admet une **tangente verticale**.

*Démonstration | Non-dérivabilité de  $\sqrt{x}$  en 0 (exigible)*

Le taux de variation de  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $a = 0$  vaut

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad (h > 0).$$

Quand  $h \rightarrow 0$  (avec  $h > 0$ ),  $\sqrt{h} \rightarrow 0$ , donc  $\frac{1}{\sqrt{h}}$  devient **aussi grand qu'on veut** : le taux ne tend vers aucun nombre fini. La fonction n'est donc **pas dérivable en 0** ; graphiquement, la tangente y est verticale. ■

**3.5 Fonction dérivée et dérivées usuelles****Définition | Fonction dérivée**

Si  $f$  est dérivable en tout point d'un intervalle  $I$ , on dit que  $f$  est **dérivable sur  $I$** . La fonction qui à chaque  $x$  associe le nombre dérivé  $f'(x)$  s'appelle la **fonction dérivée** de  $f$ , notée  $f'$ .



## ★ Théorème | Dérivées des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Sur
$k$ (constante)	0	$\mathbb{R}$
$x$	1	$\mathbb{R}$
$x^2$	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^3$	$3x^2$	$\mathbb{R}$
$x^n$ ( $n \in \mathbb{Z}$ )	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

## 3.6 Opérations sur les fonctions dérivables

## ★ Théorème | Règles de dérivation

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables et  $k$  un réel. Alors :

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$k u$	$k u'$
$u v$	$u' v + u v'$
$\frac{1}{v}$ (avec $v \neq 0$ )	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$ (avec $v \neq 0$ )	$\frac{u' v - u v'}{v^2}$
$x \mapsto g(ax + b)$	$x \mapsto a g'(ax + b)$

## Démonstration | Dérivée d'un produit (exigible)

Soit  $p = uv$ . Le taux de variation de  $p$  en  $a$  s'écrit, en ajoutant et retranchant le terme « croisé »  $u(a+h)v(a)$  :

$$\begin{aligned} \frac{p(a+h) - p(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a+h)v(a)}{h} + \frac{u(a+h)v(a) - u(a)v(a)}{h}. \end{aligned}$$

On factorise chaque morceau :

$$= u(a+h) \cdot \frac{v(a+h) - v(a)}{h} + v(a) \cdot \frac{u(a+h) - u(a)}{h}.$$

Quand  $h \rightarrow 0$  :  $u(a+h) \rightarrow u(a)$ , le premier taux tend vers  $v'(a)$ , le second vers  $u'(a)$ . On obtient  $p'(a) = u(a)v'(a) + v(a)u'(a)$ , c'est-à-dire  $(uv)' = u'v + uv'$ . ■

### Méthode | Bien choisir sa règle

- Une **somme** ou un multiple : on dérive terme à terme.
- Un **produit** de deux expressions en  $x$  : règle  $u'v + uv'$  (ne jamais « dériver chaque facteur séparément »).
- Un **quotient** : règle  $\frac{u'v - uv'}{v^2}$  (attention à l'ordre  $u'v - uv'$ , le moins compte !).
- Une expression du type  $g(ax + b)$  (par exemple  $(3x - 1)^2$ ,  $\sqrt{2x + 1}$ ) : on multiplie par  $a$ .

### Exemple | Opérations

(1)  $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$  :  $f'(x) = 6x - 5$ .

(2)  $g(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$  : avec  $u = 2x + 1$ ,  $v = x^2 - 3$ ,  $u' = 2$ ,  $v' = 2x$  :  $g'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1)(2x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$ .

(3)  $h(x) = \frac{x}{x+1}$  :  $u = x$ ,  $v = x + 1$ ,  $u' = 1$ ,  $v' = 1$  :  $h'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$ .

(4)  $k(x) = (3x - 1)^2$  : forme  $g(ax + b)$  avec  $g(t) = t^2$ ,  $a = 3$  :  $k'(x) = 3 \cdot 2(3x - 1) = 6(3x - 1)$ .

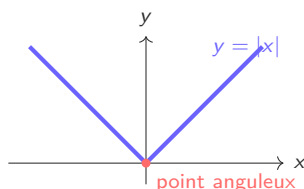
## 3.7 Dérivée de $x^n$ et fonction valeur absolue

### ✓ Propriété | Dérivée de $x^n$ pour $n$ entier relatif

Pour tout entier relatif  $n$  (avec  $x \neq 0$  si  $n \leq 0$ ), la fonction  $x \mapsto x^n$  est dérivable et  $(x^n)' = nx^{n-1}$ .  
Par exemple  $(x^4)' = 4x^3$  et  $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ .

### ✓ Propriété | La fonction valeur absolue

La fonction  $f(x) = |x|$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , mais **n'est pas dérivable en 0** : sa courbe présente un « point anguleux » à l'origine (la pente vaut  $-1$  à gauche,  $+1$  à droite). Sur  $]0; +\infty[$ ,  $f(x) = x$  donc  $f'(x) = 1$  ; sur  $] -\infty; 0[$ ,  $f(x) = -x$  donc  $f'(x) = -1$ .



## 4 Boîte à outils : réflexes pour le bac

### Méthode | Les réflexes essentiels

1. **Nombre dérivé** = **pente de la tangente** = vitesse de variation en un point.
2. **Tangente** :  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ . Toujours  $f(a)$  puis  $f'(a)$ .
3. **Produit** :  $(uv)' = u'v + uv'$  (jamais  $u'v'$  !).
4. **Quotient** :  $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$  (attention au signe et à l'ordre).
5. **Forme**  $g(ax + b)$  : on multiplie la dérivée par  $a$ .
6. **Tangente horizontale**  $\Leftrightarrow f'(a) = 0$  (utile pour les extremums, fiche suivante).
7. **À partir de la définition** : simplifie  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  jusqu'à pouvoir poser  $h = 0$ .

### Méthode | Tableau récapitulatif des dérivées

$f(x)$	$f'(x)$	Opération	Dérivée
$k$	$0$	$u + v$	$u' + v'$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$ku$	$ku'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$uv$	$u'v + uv'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

### Attention | Top 6 des erreurs à éviter

1. **Dériver un produit comme  $u'v'$** . C'est  $u'v + uv'$ .
2. **Inverser le numérateur du quotient** : c'est  $u'v - uv'$ , pas  $uv' - u'v$ .
3. **Oublier le facteur  $a$**  dans  $g(ax + b)$  (ex.  $(2x + 1)^3$ ).
4. **Confondre  $f(a)$  et  $f'(a)$**  dans l'équation de la tangente.
5. **Croire que toute fonction est dérivable partout** ( $\sqrt{x}$  et  $|x|$  ne le sont pas en 0).
6. **Oublier de simplifier le taux** avant de « faire tendre  $h$  vers 0 ».

### Méthode | Algorithme : pentes des sécantes

On approche  $f'(a)$  par les pentes des sécantes entre  $a$  et  $a + h$  pour un pas  $h$  de plus en plus petit.

```

1 def f(x):
2     return x**2
3
4 def pentes_secantes(a, h, n):
5     """Affiche n pentes de secantes en divisant h par 10 a chaque
        etape."""
6     for k in range(n):

```

```
7     pente = (f(a + h) - f(a)) / h
8     print("h =", h, "    pente =", pente)
9     h = h / 10
10
11 pentes_secantes(2, 1, 5)    # se rapproche de  $f'(2) = 4$ 
```

## 5 Exercices

### Exercice 1 ★★ : Taux de variation

1. Calculer le taux de variation de  $f(x) = x^2$  entre  $a = 1$  et  $b = 4$ .
2. Calculer le taux de variation de  $g(x) = \frac{1}{x}$  entre  $a = 2$  et  $b = 3$ .
3. Pour  $f(x) = x^2$ , simplifier  $\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ , puis en déduire  $f'(3)$ .

### Exercice 2 ★★ : Dérivées usuelles

Donner la dérivée de chaque fonction.

- |                         |                      |
|-------------------------|----------------------|
| a) $f(x) = x^3$         | c) $h(x) = \sqrt{x}$ |
| b) $g(x) = \frac{1}{x}$ | d) $k(x) = x^5$      |

### Exercice 3 ★★ : Sommes et multiples

Dériver.

- |                                |                                     |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| a) $f(x) = 4x^2 - 3x + 7$      | c) $h(x) = \frac{2}{x} + 3\sqrt{x}$ |
| b) $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$ | d) $k(x) = 5x^4 - \frac{1}{x}$      |

### Exercice 4 ★★ : Équation de tangente

1. Soit  $f(x) = x^2$ . Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse  $a = 3$ .
2. Soit  $g(x) = x^3$ . Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse  $a = 1$ .

### Exercice 5 ★★ : Produits et quotients

Dériver (en précisant  $u, v$ ).

- |                               |                                 |
|-------------------------------|---------------------------------|
| a) $f(x) = (2x + 1)(x^2 + 3)$ | c) $h(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$ |
| b) $g(x) = (x^2 - 1)(3x + 2)$ | d) $k(x) = \frac{x^2}{x + 1}$   |

### Exercice 6 ★★ : Forme $g(ax + b)$

Dériver.

- |                        |                              |
|------------------------|------------------------------|
| a) $f(x) = (3x - 1)^2$ | c) $h(x) = \sqrt{4x + 1}$    |
| b) $g(x) = (2x + 5)^3$ | d) $k(x) = \frac{1}{2x - 3}$ |

**Exercice 7** ★★★ : Lecture graphique

La courbe d'une fonction  $f$  passe par  $A(1; 2)$  et sa tangente en  $A$  a pour pente  $-3$ .

1. Donner  $f(1)$  et  $f'(1)$ .
2. En déduire l'équation de la tangente en  $A$ .
3. La tangente en un point  $B$  d'abscisse 4 est horizontale. Que vaut  $f'(4)$  ?

**Exercice 8** ★★★ : Dérivée à partir de la définition

Soit  $f(x) = x^2 + x$ .

1. Écrire et simplifier le taux  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .
2. En déduire  $f'(a)$ , puis vérifier avec les règles d'opérations.

**Exercice 9** ★★★ : Nombre dérivé de l'inverse

Soit  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

1. À partir de la définition, retrouver  $f'(a)$  pour  $a \neq 0$ .
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse  $a = 2$ .

**Exercice 10** ★★★ : Tangente parallèle à une droite

Soit  $f(x) = x^2 - 4x + 1$ .

1. Calculer  $f'(x)$ .
2. Déterminer le point de la courbe où la tangente est **horizontale**.
3. Déterminer le point où la tangente a pour pente 2.

**Exercice 11** ★★★ : Vitesse instantanée

Un mobile a pour position (en mètres) à l'instant  $t$  (en secondes)  $x(t) = t^2 + 2t$ , pour  $t \geq 0$ .

1. Calculer la vitesse moyenne entre  $t = 1$  et  $t = 3$ .
2. La vitesse instantanée est  $v(t) = x'(t)$ . Calculer  $v(t)$ , puis la vitesse à  $t = 1$  et à  $t = 3$ .

**Exercice 12** ★★★ : Démonstrations de cours

1. Redémontrer, à partir de la définition, que la dérivée de  $f(x) = x^2$  est  $f'(x) = 2x$ .
2. Redémontrer la formule de la dérivée d'un produit  $(uv)' = u'v + uv'$ .
3. Justifier l'équation de la tangente  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ .

**Exercice 13** ★★★ : Tangente passant par un point donné

Soit  $f(x) = x^2$  et le point  $P(0; -1)$  (qui n'est pas sur la courbe).

1. Écrire l'équation de la tangente  $T_a$  au point d'abscisse  $a$ .

2. Écrire que  $P$  appartient à  $T_a$ , et en déduire une équation en  $a$ .
3. Résoudre : combien de tangentes à la parabole passent par  $P$  ?

**Exercice 14** ★★★ : Position courbe / tangente

Soit  $f(x) = x^3$  et sa tangente  $T$  au point d'abscisse  $a = 1$ .

1. Déterminer l'équation de  $T$ .
2. Étudier le signe de  $f(x) - (\text{ordonnée de } T)$  près de  $x = 1$  (on factorisera  $x^3 - 3x + 2$  sachant que 1 en est racine).
3. Conclure sur la position de la courbe par rapport à  $T$  autour de  $x = 1$ .

**Exercice 15** ★★★ : Coût marginal

Une entreprise produit  $x$  objets ( $0 \leq x \leq 100$ ) ; le coût total est  $C(x) = 0,1x^2 + 5x + 200$  (en euros).

1. Le coût marginal est  $C'(x)$ . Calculer  $C'(x)$ .
2. Interpréter  $C'(50)$  : que représente concrètement ce nombre ?
3. Comparer  $C'(50)$  au coût réel du 51<sup>e</sup> objet,  $C(51) - C(50)$ .

## 6 Problème : Les tangentes à la parabole ★★★

### Problème style prépa

On considère la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = x^2$ . Ce problème étudie ses **tangentes** : on les calcule à partir de la définition, on compte combien passent par un point donné (lien avec le discriminant de la fiche 2), et on découvre une propriété remarquable des tangentes perpendiculaires.

### Partie A : le nombre dérivé et la tangente

1. À partir de la définition, montrer que pour  $f(x) = x^2$ , le nombre dérivé en  $a$  est  $f'(a) = 2a$ .
2. En déduire que la tangente  $T_a$  à  $\mathcal{P}$  au point d'abscisse  $a$  a pour équation  $y = 2ax - a^2$ .

### Partie B : tangentes issues d'un point

3. Soit  $P(x_0; y_0)$  un point du plan. Montrer que  $T_a$  passe par  $P$  si et seulement si  $a$  vérifie  $a^2 - 2x_0 a + y_0 = 0$ .
4. Calculer le discriminant de cette équation d'inconnue  $a$ . En déduire, selon la position de  $P$  par rapport à  $\mathcal{P}$  (c'est-à-dire selon le signe de  $x_0^2 - y_0$ ), le **nombre de tangentes** à  $\mathcal{P}$  passant par  $P$ .
5. Application : combien de tangentes passent par  $P(1; -3)$  ? Les déterminer.

### Partie C : tangentes perpendiculaires

6. Soient  $T_a$  et  $T_b$  les tangentes aux points d'abscisses  $a$  et  $b$  ( $a \neq b$ ). Rappeler la condition de perpendicularité sur leurs pentes, et en déduire que  $ab = -\frac{1}{4}$ .
7. Montrer que le point d'intersection de  $T_a$  et  $T_b$  a pour abscisse  $\frac{a+b}{2}$ .
8. En déduire que son ordonnée vaut  $ab$ . Conclure : lorsque deux tangentes à  $\mathcal{P}$  sont perpendiculaires, elles se coupent **toujours sur la droite** d'équation  $y = -\frac{1}{4}$ .

### Partie D : approche numérique

9. Pour  $a = 2$ , calculer les pentes des sécantes pour  $h = 1$ ,  $h = 0,1$  et  $h = 0,01$ . Vers quelle valeur tendent-elles ?
10. Expliquer en une phrase le lien avec  $f'(2)$ .



## 7 ✓ Corrigés détaillés

### Intuition | Comment lire un corrigé

Chaque corrigé rappelle la méthode et détaille tous les calculs. Cherche d'abord seul, puis compare.

### Corrigé 1

#### Démonstration

1.  $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{16 - 1}{3} = \frac{15}{3} = 5.$
2.  $\frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{1} = \frac{-\frac{1}{6}}{1} = -\frac{1}{6}.$
3.  $\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 6.$  Donc  $f'(3) = 6.$

### Corrigé 2

#### Démonstration

- a)  $f'(x) = 3x^2.$     b)  $g'(x) = -\frac{1}{x^2}.$     c)  $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$     d)  $k'(x) = 5x^4.$

### Corrigé 3

#### Démonstration

On dérive terme à terme.

- a)  $f'(x) = 8x - 3.$   
 b)  $g'(x) = 3x^2 - 4x + 1.$   
 c)  $h(x) = \frac{2}{x} + 3\sqrt{x} = 2 \times \frac{1}{x} + 3\sqrt{x},$  donc  $h'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}.$   
 d)  $k'(x) = 20x^3 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 20x^3 + \frac{1}{x^2}.$

### Corrigé 4

#### Démonstration

1.  $f(x) = x^2, a = 3 : f(3) = 9, f'(x) = 2x$  donc  $f'(3) = 6.$  Tangente :  $y = 9 + 6(x - 3) = 6x - 9.$
2.  $g(x) = x^3, a = 1 : g(1) = 1, g'(x) = 3x^2$  donc  $g'(1) = 3.$  Tangente :  $y = 1 + 3(x - 1) = 3x - 2.$

## Corrigé 5

## Démonstration

a)  $u = 2x + 1, v = x^2 + 3, u' = 2, v' = 2x : f' = 2(x^2 + 3) + (2x + 1)(2x) = 2x^2 + 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x + 6.$

b)  $u = x^2 - 1, v = 3x + 2, u' = 2x, v' = 3 : g' = 2x(3x + 2) + (x^2 - 1) \times 3 = 6x^2 + 4x + 3x^2 - 3 = 9x^2 + 4x - 3.$

c)  $u = x + 1, v = x - 2, u' = 1, v' = 1 : h' = \frac{1 \times (x - 2) - (x + 1) \times 1}{(x - 2)^2} = \frac{x - 2 - x - 1}{(x - 2)^2} = \frac{-3}{(x - 2)^2}.$

d)  $u = x^2, v = x + 1, u' = 2x, v' = 1 : k' = \frac{2x(x + 1) - x^2}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} = \frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}.$

## Corrigé 6

## Démonstration

On utilise  $(g(ax + b))' = a g'(ax + b).$

a)  $f = (3x - 1)^2 : a = 3, g(t) = t^2, g'(t) = 2t, \text{ donc } f' = 3 \times 2(3x - 1) = 6(3x - 1).$

b)  $g = (2x + 5)^3 : a = 2, g'(t) = 3t^2, \text{ donc } g' = 2 \times 3(2x + 5)^2 = 6(2x + 5)^2.$

c)  $h = \sqrt{4x + 1} : a = 4, \text{ dérivée de } \sqrt{t} \text{ est } \frac{1}{2\sqrt{t}}, \text{ donc } h' = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{4x + 1}} = \frac{2}{\sqrt{4x + 1}}.$

d)  $k = \frac{1}{2x - 3} : a = 2, \text{ dérivée de } \frac{1}{t} \text{ est } -\frac{1}{t^2}, \text{ donc } k' = 2 \times \left(-\frac{1}{(2x - 3)^2}\right) = -\frac{2}{(2x - 3)^2}.$

## Corrigé 7

## Démonstration

1.  $f(1) = 2$  (ordonnée de A) et  $f'(1) = -3$  (pente de la tangente en A).

2. Tangente :  $y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 - 3(x - 1) = -3x + 5.$

3. Une tangente horizontale a une pente nulle, donc  $f'(4) = 0.$

## Corrigé 8

## Démonstration

1. 
$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{(a + h)^2 + (a + h) - (a^2 + a)}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 + a + h - a^2 - a}{h} = \frac{2ah + h^2 + h}{h} = 2a + h + 1.$$

2. Quand  $h \rightarrow 0 : f'(a) = 2a + 1.$  Vérification par les règles :  $f'(x) = 2x + 1.$  ✓

## Corrigé 9

## Démonstration

1. 
$$\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{a - (a + h)}{a(a + h)} = \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{a(a + h)} = \frac{-1}{a(a + h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a^2}. \text{ Donc } f'(a) = -\frac{1}{a^2}.$$

2. En  $a = 2$  :  $f(2) = \frac{1}{2}$ ,  $f'(2) = -\frac{1}{4}$ . Tangente :  $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + 1$ .

### Corrigé 10

*Démonstration*

1.  $f'(x) = 2x - 4$ .
2. Tangente horizontale :  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ , et  $f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$ . Point  $(2; -3)$  (le sommet de la parabole).
3. Pente 2 :  $2x - 4 = 2 \Leftrightarrow x = 3$ , et  $f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$ . Point  $(3; -2)$ .

### Corrigé 11

*Démonstration*

1. Vitesse moyenne entre 1 et 3 :  $\frac{x(3) - x(1)}{3 - 1} = \frac{(9 + 6) - (1 + 2)}{2} = \frac{15 - 3}{2} = 6$  m/s.
2.  $v(t) = x'(t) = 2t + 2$ . Donc  $v(1) = 4$  m/s et  $v(3) = 8$  m/s. (La vitesse moyenne 6 est bien comprise entre  $v(1) = 4$  et  $v(3) = 8$ .)

### Corrigé 12

*Démonstration*

1.  $\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h \rightarrow 2a$ , donc  $f'(x) = 2x$ .
2. Pour  $p = uv$ , on écrit  $\frac{p(a+h) - p(a)}{h} = u(a+h) \frac{v(a+h) - v(a)}{h} + v(a) \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$  (en ajoutant et retranchant  $u(a+h)v(a)$ ). En faisant  $h \rightarrow 0$  :  $p' = u v' + v u'$ .
3. La tangente passe par  $A(a; f(a))$  avec la pente  $f'(a)$ . Une droite de pente  $m$  par  $A$  s'écrit  $y - f(a) = m(x - a)$ , d'où  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ .

### Corrigé 13

*Démonstration*

1. Pour  $f(x) = x^2$ ,  $f'(a) = 2a$ , donc  $T_a : y = a^2 + 2a(x - a) = 2ax - a^2$ .
2.  $P(0; -1) \in T_a$  si et seulement si  $-1 = 2a \times 0 - a^2 = -a^2$ , soit  $a^2 = 1$ .
3.  $a^2 = 1$  donne  $a = 1$  ou  $a = -1$  : il y a donc **deux** tangentes à la parabole passant par  $P$ . Pour  $a = 1$  :  $T_1 : y = 2x - 1$  ; pour  $a = -1$  :  $T_{-1} : y = -2x - 1$ .

## Corrigé 14

## Démonstration

1.  $f(1) = 1$ ,  $f'(x) = 3x^2$  donc  $f'(1) = 3$ . Tangente :  $T : y = 1 + 3(x - 1) = 3x - 2$ .
2.  $f(x) - (3x - 2) = x^3 - 3x + 2$ . Comme 1 est racine, on factorise :  $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)(x - 1)(x + 2) = (x - 1)^2(x + 2)$ .
3. Autour de  $x = 1$ ,  $(x - 1)^2 \geq 0$  et  $(x + 2) > 0$ , donc  $f(x) - (3x - 2) \geq 0$  : la courbe est **au-dessus** de sa tangente  $T$  au voisinage de  $x = 1$  (elles se touchent en  $x = 1$ ).

## Corrigé 15

## Démonstration

1.  $C'(x) = 0,2x + 5$ .
2.  $C'(50) = 0,2 \times 50 + 5 = 10 + 5 = 15$ . C'est le **coût marginal** en  $x = 50$  : le coût approximatif de production du 51<sup>e</sup> objet, soit environ 15 €.
3.  $C(51) - C(50)$  :  $C(51) = 0,1 \times 2601 + 5 \times 51 + 200 = 260,1 + 255 + 200 = 715,1$  et  $C(50) = 0,1 \times 2500 + 250 + 200 = 700$ . Donc  $C(51) - C(50) = 15,1$  €, très proche de  $C'(50) = 15$  : le coût marginal est une excellente approximation.

## Corrigé du problème : Les tangentes à la parabole

## Démonstration / Partie A

1.  $\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2a$ , donc  $f'(a) = 2a$ .
2.  $T_a : y = f(a) + f'(a)(x - a) = a^2 + 2a(x - a) = a^2 + 2ax - 2a^2 = 2ax - a^2$ .

## Démonstration / Partie B

3.  $P(x_0; y_0) \in T_a$  si et seulement si  $y_0 = 2ax_0 - a^2$ , ce qui s'écrit  $a^2 - 2x_0a + y_0 = 0$  (équation d'inconnue  $a$ ).
4. Discriminant :  $\Delta = (-2x_0)^2 - 4 \times 1 \times y_0 = 4x_0^2 - 4y_0 = 4(x_0^2 - y_0)$ . Donc :
  - si  $y_0 < x_0^2$  (point **sous** la parabole) :  $\Delta > 0$ , **deux** tangentes ;
  - si  $y_0 = x_0^2$  (point **sur** la parabole) :  $\Delta = 0$ , **une** tangente ;
  - si  $y_0 > x_0^2$  (point **au-dessus**) :  $\Delta < 0$ , **aucune** tangente.
5. Pour  $P(1; -3)$  :  $x_0^2 - y_0 = 1 - (-3) = 4 > 0$ , donc deux tangentes. On résout  $a^2 - 2a - 3 = 0$  :  $(a - 3)(a + 1) = 0$ , soit  $a = 3$  ou  $a = -1$ . Tangentes :  $y = 6x - 9$  et  $y = -2x - 1$ .

## Démonstration / Partie C

6. Les pentes de  $T_a$  et  $T_b$  sont  $2a$  et  $2b$ . Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs pentes vaut  $-1$  :  $(2a)(2b) = -1$ , soit  $4ab = -1$ , donc  $ab = -\frac{1}{4}$ .
7. L'intersection vérifie  $2ax - a^2 = 2bx - b^2$ , soit  $2(a - b)x = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ . Comme  $a \neq b$ , on simplifie par  $a - b$  :  $x = \frac{a + b}{2}$ .

8. L'ordonnée vaut alors  $y = 2a \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 = a(a+b) - a^2 = ab$ . Or  $ab = -\frac{1}{4}$ , donc  $y = -\frac{1}{4}$  : le point d'intersection est toujours sur la droite  $y = -\frac{1}{4}$ . (C'est la directrice de la parabole.)

*Démonstration / Partie D*

9. Les pentes des sécantes valent  $\frac{(2+h)^2 - 4}{h} = 4 + h$  : pour  $h = 1, 5$  ; pour  $h = 0,1, 4,1$  ; pour  $h = 0,01, 4,01$ . Elles tendent vers 4.

10. Cette valeur limite 4 est précisément  $f'(2) = 2 \times 2$  : les pentes des sécantes tendent vers le nombre dérivé.

**Bilan de la fiche.** Tu sais désormais : calculer un taux de variation et un nombre dérivé (y compris à partir de la définition) ; écrire l'équation d'une tangente  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$  ; dériver les fonctions usuelles et utiliser les règles sur les sommes, produits, quotients et formes  $g(ax + b)$  ; interpréter  $f'$  comme une vitesse ou un coût marginal. La fiche suivante exploite le **signe de  $f'$**  pour étudier les variations.